# 20200225 高三数学综合试卷（7）

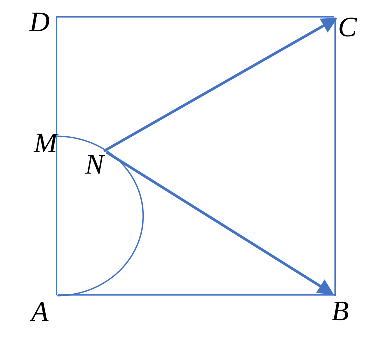
## 参考答案及评分标准

**一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分.**

1. $\{0,1,2\}$　　2. 5　　3. $y=2$　　4. $\frac{7}{10}$　　5. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　6. 22　　7. $\frac{4}{65}$　　8. $\frac{\sqrt{35}}{4}$　　9. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

10. $[2,6]$　　11. 2

12. $14-2\sqrt{17}$



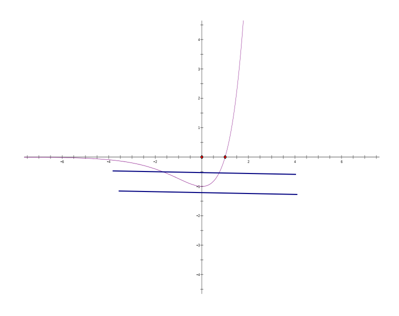

解：　如图所示，　动点 $N$ 在以 $A,M$ 为直径的半圆上，

取 $BC$ 的中点 $Q$，所以 $\overrightarrow{NB}\cdot\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{NQ}^2-\overrightarrow{BQ}^2=NQ^2-4$

又 $NQ_{\min}=\sqrt{17}-1$，所以 $(\overrightarrow{NB}\cdot\overrightarrow{NC})_{\min}=14-2\sqrt{17}$ .

13. $[-\frac{2}{e}-1,-\frac{3}{e^2}-1)$

解：　由 $f^2(x)-(2a+1)f(x)+a^2+a\leqslant 0$ 可知 $a\leqslant f(x)\leqslant a+1$，又 $f'(x)=e^x x$，所以 $f(x)$ 的图象如图所示，由于 $f(0)=-1$，而在 $y=a,y=a+1$ 的距离为1，所以 $f(-1)\leqslant a+1<f(-2)$，即 $a$ 的取值范围是 $[-\frac{2}{e}-1,-\frac{3}{e^2}-1)$ .



14．$2\sqrt{3}$

解：令 $x=m$，　$x+y=n$，则已知得 $m>0,n>0$，且 $mn(n-m)^2=9$ .

$mn(m-n)^2=9\Rightarrow(m-n)^2=\frac{9}{mn}\Rightarrow(m+n)^2=(m-n)^2+4mn=\frac{9}{mn}+4mn\geq 12$，

当且仅当 $m=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{6}}{2},n=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时等号成立，此时 $2x+y=m+n\geq 2\sqrt{3}$ .

**二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分.**

15．解：（1）由正弦定理及 $a^2-b^2=(a\cos B+b\cos A)^2$，

可得 $\sin^2 A-\sin^2 B=(\sin A\cos B+\sin B\cos A)^2$，……………………………2 分

由 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)$，又 $A+B+C=\pi$

所以 $\sin(A+B)=\sin C$，故 $\sin^2 A-\sin^2 B=\sin C^2$，…………………………………4 分

所以 $a^2-b^2=c^2$，所以角 $A$ 的大小为 $\frac{\pi}{2}$．…………………………………6 分

（2）在 $\Delta ACD$ 中，由余弦定理得

$\cos C=\frac{AC^2+CD^2-AD^2}{2CD\cdot AC}=\frac{14^2+6^2-10^2}{2\times14\times6}=\frac{11}{14}$，…………………………………8 分

即 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\frac{11^2}{14^2}}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，…………………………………10 分

故 $\tan C=\frac{5\sqrt{3}}{11}$，…………………………………12 分

所以 $\tan C=\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{11}$，故 $AB=\frac{70\sqrt{3}}{11}$．…………………………………14 分

16. (1)证明：连结 $AC_1$ 交 $A_1C$ 与点 O，连结 DO;

由直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 可知，侧面 $A_1C$ 为平行四边形;

所以 $O$ 为 $AC_1$ 的中点 又 $D$ 为 $AB$ 的中点; 所以 $OD//BC_1$；………………2 分

而 $BC_1\not\subset$ 面 $A_1CD$, $OD\subset$ 面 $A_1CD$,所以直线 $BC_1$ // 平面 $A_1CD$．………………6 分

(2)连结 $B_1C$ ,因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱, 所以 $BB_1\perp$ 平面 $ABC$;

又 $AC\subset$ 面 $ABC$ 所以 $AC\perp BB_1$,………………8 分

又 $AC\perp BC$，而 $BB_1\subset$ 面 $BCC_1B_1$, $BC\subset$ 面 $BCC_1B_1$,且 $BB_1\cap BC=B$,

所以 $AC\perp$ 面 $BCC_1B_1$,………………10 分

所以 $AC\perp BC_1$;

又 $BC=BB_1$，所以 $BC_1\perp B_1C$．

又 $B_1C\cap AC=C$，所以 $BC_1\perp$ 平面 $ACB_1$，………………12 分

又 $AB_1\subset$ 面 $AB_1C$ ;所以 $BC_1\perp AB_1$.………………14 分

17. 解：（1）已知椭圆的长轴的长为 4，离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$

所以$a=2, e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以$b^2=a^2-c^2=\frac{4}{3}$，

所以椭圆$E$的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{4}{3}}=1$.………………4 分

（2）因为四边形$ABCD$为菱形，所以$AC\perp BD$.

于是可设直线$AC$的方程为$y=-x+n$.

由$\begin{cases}x^2+3y^2=4,\\ y=-x+n\end{cases}$得$4x^2-6nx+3n^2-4=0$. ………………6 分

因为$A$，$C$在椭圆上，所以$\Delta=-12n^2+64>0$，解得$-\frac{4\sqrt{3}}{3}<n<\frac{4\sqrt{3}}{3}$. …………8 分

设 $A$，$C$ 两点坐标分别为 $(x_1, y_1)$ $(x_2, y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{3n}{2}$， $x_1x_2=\frac{3n^2-4}{4}$，

$y_1=-x_1+n$，$y_2=-x_2+n$.

所以$y_1+y_2=\frac{n}{2}$. 所以$AC$的中点坐标为$\left(\frac{3n}{4},\frac{n}{4}\right)$. ………………10 分

由四边形$ABCD$为菱形可知，点$\left(\frac{3n}{4},\frac{n}{4}\right)$在直线$y=x+1$上， 所以$\frac{n}{4}=\frac{3n}{4}+1$，

解得$n=-2$. ………………12 分

所以直线$AC$的方程为$y=-x-2$，即$x+y+2=0$. ………………14 分

18. 解：（1）在平面直角坐标系 $xOy$ 中，设定点$P(a,a)$ $(a>2)$，因为 $OP=5\sqrt{2}$，所以

$\sqrt{a^2+a^2}=5\sqrt{2}$，解得$a=5$，即点$P(5,5)$. ………………2 分

因为点$A$到$l_1$的垂直距离为 1 百米，所以点$A(1,4)$；

所以$AP=\sqrt{(5-1)^2+(5-4)^2}=\sqrt{17}$， ………………4 分

又因为$A,B$关于直线$l$对称，点$P$在直线$l$上，所以$AP=BP$. 即$AP+BP=2\sqrt{17}$.

答：玻璃栈道$AP+BP$的总长度是$2\sqrt{17}$百米. ………………6 分

（2）在平面直角坐标系 $xOy$ 中，设定点 $P(a,a)$ $(a>2)$，动点 $A(x,\frac{4}{x})$（$0<x<2$），因为 $A,B$ 关于直线 $l$ 对称，点 $P$ 在直线 $l$ 上，所以 $AP=BP$. ………………7 分

$AP=\sqrt{(x-a)^2+(\frac{4}{x}-a)^2}$，则 $AP^2=x^2+\frac{16}{x^2}-2a(x+\frac{4}{x})+2a^2$，………………9 分

令 $x+\frac{4}{x}=t$，则 $AP^2=(x+\frac{4}{x})^2-2a(x+\frac{4}{x})+2a^2-8=t^2-2at+2a^2-8$，

函数 $y=x+\frac{4}{x}$ 的导数 $y'=1-\frac{4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$，当 $0<x<2$ 时，$y'<0$，

所以 $y=x+\frac{4}{x}$ 在 $(0,2)$ 上单调减，所以 $t\in(4,+\infty)$ ………………11 分

函数 $h(t)=t^2-2at+2a^2-8, t\in(4,+\infty)$ 图象对称轴是 $t=a$，

当 $a\le 4$ 时，$h(t)$ 在区间 $(4,+\infty)$ 上单调递增，无最小值；………………12 分

当 $a>4$ 时，$h(t)$ 在 $(4,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，

即 $h(t)$ 在 $t=a$ 时有最小值 $h(a)=a^2-8$，由题意 $a^2-8=28$，因为 $a>4$，所以 $a=6$. ………………15 分

答：若要使得玻璃栈道 $AP+BP$ 总长度最小为 $4\sqrt{7}$ 百米，观景平台 $P$ 的坐标是 $(6,6)$. ………………16 分

19. 解：（1）函数定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称.

当 $m=0$ 时，$f(x)=|x|(x^2-3)$，$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=|-x|\left((-x)^2-3\right)=|x|\left(x^2-3\right)=f(x)$，

则 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数；………………2 分

当 $m\ne 0$ 时，$f(1)=-2|m-1|, f(-1)=-2|m+1|$，$f(1)\ne f(-1)$ 且 $f(1)+f(-1)\ne 0$，所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数. ………………4 分

（2）当 $x\in[0,m]$ 时，$x-m<0$，即已知 $-(x-m)(x^2-3)\le 3x$ 在 $[0,m]$ 上恒成立，

即 $x^3-mx^2+3m\ge 0$ 在 $[0,m]$ 上恒成立，令 $h(x)=x^3-mx^2+3m$，只要使 $h(x)_{min}\ge$ . ………………6 分

$h'(x)=3x^2-2mx=3x(x-\frac{2}{3}m)$，

因为 $m>0$，

当 $x\in\left(0,\frac{2}{3}m\right)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $\left[0,\frac{2}{3}m\right]$ 上单调递减，

当 $x \in \left(\frac{2}{3}m, m\right)$ 时，$h'(x) > 0$，$h(x)$ 在 $\left[\frac{2}{3}m, m\right]$ 上单调递增，即 $h(x)$ 的最小值是 $h(\frac{2}{3}m)$，………………8 分

解不等式 $h(\frac{2}{3}m) \geq 0$，得 $0 < m \leq \frac{9}{2}$． 所以实数 $m$ 的最大值是 $\frac{9}{2}$． ………………10 分

（3）当 $m = 0$ 时，$f(x) = |x|(x^2 - 3)$，解 $f(x) = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = \pm\sqrt{3}$，…………11 分

问题即求 $f(x) = 0$ 和 $f(x) = \sqrt{3}$ 和 $f(x) = -\sqrt{3}$ 三个方程总的解的个数.

由（1）得函数 $f(x) = |x|(x^2 - 3)$ 是偶函数，

当 $x > 0$ 时，$f(x) = x^3 - 3x$，$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$，

当 $x \in (0,1)$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

当 $x \in (1,+\infty)$ 时，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

所以 $f(x)_{\min} = f(1) = -2$，且 $f(0) = 0$

由偶函数的性质，$f(x) = |x|(x^2 - 3)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,0)$ 上单调递增………………13 分

方程 $f(x) = 0$ 有 3 个解；方程 $f(x) = \sqrt{3}$ 有 2 个解；方程 $f(x) = -\sqrt{3}$ 有 4 个解；所以函数 $y = f(f(x))$ 的零点个数是 9 个。………………16 分

20. 解：（1）当 $\lambda = \mu = 1$ 时，$a_{n+1} + a_n = n + 2^n$，记数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项的和为 $T$；

$$T = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n})$$

$$= (1+2) + (3+2^3) + (5+2^5) + \cdots + (2n-1+2^{2n-1})$$

$$= (1+3+5+\cdots+2n-1) + (2+2^3+2^5+\cdots+2^{2n-1})$$ ………………………2 分

$$= n^2 + \frac{2(1-4^n)}{1-4} = n^2 + \frac{2(4^n-1)}{3}$$ ………………………………4 分

（2）①当 $\lambda = 4, \mu = 0$ 时，由 $a_1 = 1$，所以 $a_2 = 3$

$a_{n+1} + a_n = 4n$（$n \geqslant 1$），$a_n + a_{n-1} = 4(n-1)\ (n \geqslant 2)$ （$n \geqslant 1$）

所以 $a_{n+1} - a_{n-1} = 4(n \geqslant 2)$ ………………………………6 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的奇数项和偶数项分别成公差为 4 的等差数列，

所以 $a_{2n} = 3 + 4(n-1) = 4n - 1$，$a_{2n-1} = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$

所以 $a_n=2n-1$；……………………………8 分

②由①可知 $S_n=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$ ……………………………9 分

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q$，

因为无穷项等比数列 $\{b_n\}$ 始终满足 $S_1\leqslant b_n\leqslant S_n$，

所以当 $n=1$ 时，$S_1\leqslant b_1\leqslant S_1$，所以 $b_1=S_1=1$，……………………………10 分

所以 $1\leqslant q^{n-1}\leqslant n^2$，

由 $q^{n-1}\geqslant 1$，所以 $q\geqslant 1$

当 $q$=1 时，成立，所以 $b_n=1$；……………………………11 分

当 $q>1$ 时，下证 $q^{n-1}\leqslant n^2$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 不恒成立，

要证 $q^{n-1}\leqslant n^2$，即证 $(n-1)\ln q\leqslant 2\ln n$

先证 $\ln x<x$，从而得到 $\ln\sqrt{x}<\sqrt{x}$，即 $\ln x<2\sqrt{x}$ ……………………………13 分

下证 $(n-1)\ln q<2\sqrt{n}$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 不恒成立，

令 $\sqrt{n}=t$，所以要证 $(\ln q)t^2-2t-\ln q<0$ 对任意的 $t>0$ 不恒成立,

所以存在 $t_0=\dfrac{2+2(\ln q)^2}{\ln q}$，当 $t>\dfrac{2+2(\ln q)^2}{\ln q}$ 时，$(\ln q)t^2-2t-\ln q>0$

所以 $(n-1)\ln q<2\sqrt{n}$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 不恒成立.

所以当 $q>1$ 时，$q^{n-1}\leqslant n^2$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 不恒成立，

所以 $q$=1，所以 $b_n=1$.……………………………16 分

# 张家港市 2020 届阶段性调研试卷

## 数学Ⅱ（附加题）参考答案及评分标准

21 **A**．解： $\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$，即 $\begin{bmatrix}2+a\\2b-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$， ……………………………………2 分

$\therefore\begin{cases}2+a=4,\\2b-1=5.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=3.\end{cases}$， ……………………………………4分

$\therefore M=\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\end{bmatrix}$, ……………………………………5分

解法一：$\therefore\det(M)=\begin{vmatrix}1&2\\3&-1\end{vmatrix}=-7$， $M^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{-7}&\frac{-2}{-7}\\\frac{-3}{-7}&\frac{1}{-7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{7}&\frac{2}{7}\\\frac{3}{7}&-\frac{1}{7}\end{bmatrix}$.

……………………………………10分

解法二：设 $M^{-1}=\begin{bmatrix}c&d\\e&f\end{bmatrix}$，由 $M^{-1}M=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，得 $\begin{bmatrix}c+3d&2c-d\\e+3f&2e-f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

$\therefore\begin{cases}c+3d=1,\\e+3f=0,\\2c-d=0,\\2e-f=1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}c=\frac{1}{7},\\d=\frac{2}{7},\\e=\frac{3}{7},\\f=-\frac{1}{7}.\end{cases}$ $\therefore M^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{7}&\frac{2}{7}\\\frac{3}{7}&-\frac{1}{7}\end{bmatrix}$. ……………………………………10 分

**B**．解 直线 $l$ 的普通方程为：$x+y-1=0$. ……………………………………3 分

由 $\rho\cos^2\theta=\sin\theta$，得 $\rho^2\cos^2\theta=\rho\sin\theta$，

则 $y=x^2$，故曲线 $C$ 的直角坐标方程为 $y=x^2$. ……………………………………6 分

将 $\begin{cases}x=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}t\\y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ 代入 $y=x^2$，得 $t^2+\sqrt{2}t-2=0$，则 $t_1t_2=-2$， …………………8 分

故 $PA\bullet PB=|t_1t_2|=2$. …………………10 分

**C**．证明　因为 $f(x)=|x-1|+|x+2|\geqslant|x-1-(x+2)|=3$，

所以 $k=3$，……………………………3 分

因为 $\frac{1}{m}+\frac{k^2}{n}=\frac{1}{m}+\frac{9}{n}=1(mn>0)$，所以 $m>0,n>0$，

$m+n=(m+n)(\frac{1}{m}+\frac{9}{n})=(10+\frac{n}{m}+\frac{9m}{n})\geqslant 10+2\sqrt{9}=16$ ………………7 分

□□□□ $\frac{n}{m}=\frac{9m}{n}$，即 $m=4,n=12$ 时取等号，故 $m+n\geqslant 16$. …………10 分

22．解（1）由题意“$S_1$=5 且 $S_2\geq 0$”表示：

“答完 2 题，第一题答对，第二题答错；或第一题答对，第二题也答对”

此时概率 $P=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ .　……………………………3 分

（2）因为答完 5 道题，结果可能是：

答对 0 道，此时 $S_5=-25$，$\xi=25$；答对 1 道，此时 $S_5=-15$，$\xi=15$；

答对 2 道，此时 $S_5=-5,\xi=5$；答对 3 道，此时 $S_5=5,\xi=5$；

答对 4 道，此时 $S_5=15,\xi=15$；答对 5 道，此时 $S_5=25,\xi=25$，

∴ $\xi$ 的取值只能是 5,15,25　……………………………6 分

因此 $P(\xi=5)=C_5^2(\frac{2}{3})^3\times(\frac{1}{3})^2+C_5^3(\frac{1}{3})^3\times(\frac{2}{3})^2=\frac{40}{81}$，

$P(\xi=15)=C_5^1(\frac{2}{3})^4\times\frac{1}{3}+C_5^4(\frac{1}{3})^4\times\frac{2}{3}=\frac{10}{27}$，

$P(\xi=25)=C_5^0(\frac{2}{3})^5+C_5^5(\frac{1}{3})^5=\frac{11}{81}$

∴ $\xi$ 的分布列为：

| $\xi$ | 5 | 15 | 25 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{40}{81}$ | $\frac{10}{27}$ | $\frac{11}{81}$ |

……………………………9 分

∴ $E\xi=5\times\frac{40}{81}+15\times\frac{10}{27}+25\times\frac{11}{81}=\frac{925}{81}$　……………………………10 分

23. 证明：（1）法一：

$$C_n^m + C_n^{m-1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!}$$
$$= \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!}(\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m+1})$$
$$= \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} \cdot \frac{n+1}{m(n-m+1)}$$
$$= \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} = C_{n+1}^m$$

…………………………4 分

法二：构造实际模型：从$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, a_{n+1}\}$选$m$个不同的元素，则有$C_{n+1}^m$种方法，而对于集合$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, a_{n+1}\}$中的每一个元素都处于在或不在$C_{n+1}^m$中，如$a_1$在，则有$C_n^{m-1}$种，如$a_1$不在，则有$C_n^m$，由算两次思想，得：$C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$.…………………………4 分

（2）因为

$$2C_1^1C_{n-2}^2 + 3C_2^1C_{n-3}^2 + 4C_3^1C_{n-4}^2 + \cdots + (n-2)C_{n-3}^1C_2^2$$
$$= 2(C_2^2C_{n-2}^2 + C_3^2C_{n-3}^2 + C_4^3C_{n-4}^2 + \cdots + C_{n-2}^2C_2^2)$$

所以只要证：$C_2^2C_{n-2}^2 + C_3^2C_{n-3}^2 + C_4^3C_{n-4}^2 + \cdots + C_{n-2}^2C_2^2 = C_{n+1}^5$…………………………6 分

法一：用数学归纳法证明：

下证：$C_2^2C_{n-2}^2 + C_3^2C_{n-3}^2 + \cdots + C_{n-2}^2C_2^2 = C_{n+1}^5$

当$n=5$时，由（1）知，等式成立；

假设当$n=k$，$k \geqslant 5$时，等式成立，即$C_2^2C_{k-2}^2 + C_3^2C_{k-3}^2 + \cdots + C_{k-2}^2C_2^2 = C_{k+1}^5$，

则$n=k+1$时，

$$C_2^2C_{k-1}^2 + C_3^2C_{k-2}^2 + \cdots + C_{k-1}^2C_2^2$$
$$= C_2^2\left(C_{k-2}^2 + C_{k-2}^1\right) + C_3^2\left(C_{k-3}^2 + C_{k-3}^1\right) + \cdots + C_{k-2}^2\left(C_2^2 + C_2^1\right) + C_{k-1}^2C_2^2$$
$$= \left(C_2^2C_{k-2}^2 + C_3^2C_{k-3}^2 + \cdots + C_{k-2}^2C_2^2\right) + (k-2)C_2^2 + (k-3)C_3^2 + \cdots + 2C_{k-2}^2 + C_{k-1}^2$$
$$= C_{k+1}^5 + (k+1)\left(C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_{k-1}^2\right) - \left(3C_2^2 + 4C_3^2 + \cdots + kC_{k-1}^2\right)$$
$$= C_{k+1}^5 + (k+1)C_k^3 - 3\left(C_3^3 + C_4^3 + \cdots + C_k^3\right)$$
$$= C_{k+1}^5 + 4C_{k+1}^4 - 3C_{k+1}^4$$
$$= C_{k+2}^5$$

所以$C_2^2C_{n-2}^2 + C_3^2C_{n-3}^2 + C_4^3C_{n-4}^2 + \cdots + C_{n-2}^2C_2^2 = C_{n+1}^5$…………………………10 分

法二：构造$\{1, 2, 3, \cdots, n, n+1\}$，从中选择 5 元子集，每个子集中的元素从小到大排，则有$C_{n+1}^5$个子集，每个子集中的中间元素为 3，4，5，…，$n-2$，所以

$C_2^2C_{n-2}^2 + C_3^2C_{n-3}^2 + C_4^3C_{n-4}^2 + \cdots + C_{n-2}^2C_2^2 \in$…………………………10 分

法三：

等式中的通项：当$2 \leqslant k \leqslant n-2$时，

$(n-k)(n-k-1)C_k^2$

$=n^2C_k^2-n(2k+1)C_k^2+k(k+1)C_k^2$

$=n^2C_k^2-2n(k+1)C_k^2+nC_k^2+(k+1)(k+2)C_k^2-2(k+1)C_k^2$

$=n^2C_k^2-6nC_{k+1}^3+nC_k^2+12C_{k+2}^4-6C_{k+1}^3$

$=(n^2+n)C_k^2-(6n+6)C_{k+1}^3+12C_{k+2}^4$

……………………………8 分

所以

$2C_1^1C_{n-2}^2+3C_2^1C_{n-3}^2+4C_3^1C_{n-4}^2+\cdots+(n-2)C_{n-3}^1C_2^2$

$=(n^2+n)(C_2^2+C_3^2+\cdots+C_{n-2}^2)-(6n+6)(C_3^3+C_4^3+\cdots+C_{n-1}^3)$

$+12(C_4^4+C_5^4+\cdots+C_n^4)$

$=(n^2+n)(C_3^3+C_3^2+\cdots+C_{n-2}^2)-(6n+6)(C_4^4+C_4^3+\cdots+C_{n-1}^3)$

$+12(C_5^5+C_5^4+\cdots+C_n^4)$

$=(n^2+n)C_{n-1}^3-(6n+6)C_n^4+12C_{n+1}^5$

$=20C_{n+1}^5-30C_{n+1}^5+12C_{n+1}^5=2C_{n+1}^5$

……………………………10 分